-EXERCICE 15.5-

• ENONCE :

« La comète Kobayashi »

• La comète Kobayashi est une comète quasi-parabolique : l'excentricité de sa trajectoire (située dans le plan de l'écliptique) vaut $e = 1,0001$ (on prendra $e = 1$ pour les calculs).

• Elle est passée à son périhélie le 5.09.1975, périhélie situé à r_P = 0,426 ua (1 unité astronomique = 150 millions de kilomètres).

• On sait par ailleurs que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est pratiquement un cercle de rayon a=1 ua, décrit avec une vitesse $V = 29,8\ km/s$.

1) Calculer la vitesse v_P de la comète lors de son passage au périhélie P.

2) En prenant pour axe polaire l'axe passant par P, donner l'équation de la trajectoire de la comète $r = f(\theta)$.

3) Déterminer l'angle polaire de la comète aux points de rencontre avec l'orbite de la Terre.

4) Donner les dates de croisement de la comète avec l'orbite de la Terre.

<u>Donnée</u> : une primitive de la fonction $\dfrac{2}{(1+\cos\theta)^2}$ est $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \dfrac{1}{3} \times \tan^3\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

5) Compte tenu de la valeur exacte de l'excentricité, quel est l'avenir de la comète Kobayashi ?

• CORRIGE : «La comète Kobayashi »

1) La trajectoire étant assimilée à une parabole, on sait que l'énergie mécanique de la comète est constante et nulle ; on l'exprime au périhélie :

$E=0=\frac{1}{2}mv_P^2-\frac{GM_Sm}{r_P}$, où m est la masse de la comète et M_S celle du Soleil.

• Pour déterminer le produit GM_S, appliquons le PFD à la Terre (de trajectoire circulaire) soumise à la seule force d'attraction du Soleil ; en projection sur le vecteur normal de la base de Frenet, il vient :

$M_T\times\frac{V^2}{a}=\frac{GM_SM_T}{a^2}\Rightarrow GM_S=aV^2\Rightarrow \boxed{v_P=V\times\sqrt{\frac{2a}{r_P}}}$ A.N : $\boxed{v_P=29{,}8\times\sqrt{\frac{2}{0{,}426}}=64{,}6\ km/s}$

2) On sait qu'en coordonnées polaires , l'équation d'une conique est : $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$

Ici, $e=1$ et l'axe polaire passant par le périhélie, la plus petite distance est obtenue pour $\theta=0$; on en déduit : $r=\frac{p}{1+\cos\theta}$; or, $r=r_P$ en $\theta=0\Rightarrow p=2r_P\Rightarrow \boxed{r=\frac{2r_P}{1+\cos\theta}}$ (1)

3) Les angles θ_C correspondant aux croisements avec l'orbite de la Terre sont donnés par :

$r=a\Rightarrow$ $\boxed{\theta_C=\pm\arccos\left(\frac{2r_P}{a}-1\right)=\pm 98{,}5°}$

4) Pour revenir à une description temporelle du phénomène étudié, il faut utiliser la loi des aires :

$C=r^2\times\dot{\theta}=r_Pv_P$ (au périhélie, le rayon-vecteur et le vecteur vitesse sont perpendiculaires)

• Grâce à la relation (1), il vient :

$\frac{4r_P^2}{(1+\cos\theta)^2}\times\frac{d\theta}{dt}=r_Pv_P\Rightarrow dt=\frac{2r_P}{v_P}\times\frac{2}{(1+\cos\theta)^2}\times d\theta\Rightarrow$ $\boxed{\Delta t_C=\frac{2r_P}{v_P}\times\left[\tan\left(\frac{\theta_C}{2}\right)+\frac{1}{3}\times\tan^3\left(\frac{\theta_C}{2}\right)\right]}$

où Δt_C est l'intervalle de temps séparant le passage au périhélie des dates de croisement avec l'orbite terrestre.

Application numérique : $\boxed{\Delta t_C\simeq\pm 3{,}3.10^6\,s=\pm 38\text{ jours}}$ $\Rightarrow$

date d'entrée :	29.07.1975
date de sortie :	13.10.1975

5) L'excentricité étant supérieure à 1, la trajectoire est en réalité **hyperbolique** : la comète échappera donc totalement à l'attraction solaire, et poursuivra sa course bien au-delà de notre système solaire…

Le fait que l'excentricité soit devenue supérieure à 1 est dû aux « accidents de parcours » de la comète, comme la perte de masse à l'approche du périhélie (point le plus proche du Soleil) ou l'interaction avec une grosse planète comme Jupiter (pour la comète Hale-Bopp, son passage près de Jupiter en 1996 va rapprocher son prochain rendez-vous, dans 2600 ans au lieu de 4000 ans !).